DOI: 10.12731/2227-930X-2018-2-143-154

УДК 621.311.6

РАСЧЕТ СИНТЕЗИРУЕМОГО ОПТИМАЛЬНОГО И КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Стрелков А.А., Арутюнян А.А.

В настоящее время построена математическая теория оптимального управления. На её основе разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

Решаемую в данной работе задачу в современной теории управления принято называть задачей аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР).

Цель – необходимо найти закон обратной связи $U(X)$, который переводит объект из начального состояния $X(0) = X_0$ в конечное состояние $X(\infty) = 0$ с наименьшим значением функционала качества, объявленного ранее.

Метод или методология проведения работы: в статье использовались математические методы и модели.

Результаты: В настоящее время построена математическая теория оптимального управления. На её основе разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

Область применения результатов: полученные результаты могут быть использованы инженерами в различных отраслях промышленности при проектировании оптимальных по точности электроприводов, построенных на базе вентильных синхронных двигателей переменного тока (роботы и манипуляторы, приводы подач и главного движения металлорежущих станков, координатные устройства, автоматические линии по обработке различных

материалов или сборке изделий, упаковочные и печатные машины, принтеры и плоттеры, намоточные и лентопротяжные механизмы).

Ключевые слова: оптимальное управление; быстродействие; оптимальный регулятор.

CALCULATION OF THE SYNTHESIZED OPTIMAL AND QUASI-OPTIMAL REGULATOR

Strelkov A.A., Arutyunyan A.A.

At the present time, a mathematical theory of optimal control has been constructed. On its basis, methods for constructing optimal systems for speed and methods for the analytical design of optimal regulators have been developed.

The problem solved in this paper in modern control theory is usually called the task of analytical design of the optimal controller (AKOR).

Purpose. *The goal is to find the feedback law $U(X)$, which transfers the object from the initial state $X(0) = X_0$ to the final state $X(\infty) = 0$ with the smallest value of the quality functional announced earlier.*

Method or methodology of the work. *The article used mathematical methods and models.*

Results. *At present, a mathematical theory of optimal control is constructed. On its basis, methods for constructing optimal systems for speed and methods for the analytical design of optimal regulators have been developed.*

Scope of application of the results: *the results obtained can be used by engineers in various industries in the design of optimal precision electric drives built on the basis of AC synchronous synchronous motors (robots and manipulators, feed drives and main movements of metal cutting machines, coordinate devices, automatic lines for processing various materials or assembly of products, packaging and printing machines, printers and plotters, winding and tape mechanisms).*

Keywords: *optimal control; speed; optimum regulator.*

Введение

В настоящее время построена математическая теория оптимального управления. На её основе разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

Решаемую в данной работе задачу в современной теории управления принято называть задачей аналитического конструирования оптимального регулятора (АКОР). Задача ставится следующим образом: необходимо найти закон обратной связи $U(X)$, который переводит объект из начального состояния $X(0) = X_0$ в конечное состояние $X(\infty) = 0$ с наименьшим значением функционала качества, объявленного ранее.

Цель – необходимо найти закон обратной связи $U(X)$, который переводит объект из начального состояния $X(0) = X_0$ в конечное состояние $X(\infty) = 0$ с наименьшим значением функционала качества, объявленного ранее.

Материалы и методы

Для сравнения оптимальной и квазиоптимальной систем при моделировании рассмотрим расчет оптимального регулятора. Критерий оптимальности по быстродействию имеет вид:

$$J = \int_0^T 1 dt \rightarrow \min \quad (1.1)$$

$$X(0) = X_0, X(T) \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

$$|u_j(t)| \leq U_{jMAX} \quad (1.3)$$

В данном случае оптимальным управлением является релейное, что легко можно доказать, используя принцип максимума Понтрягина:

$$H(X(t), \psi(t), U(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i \quad (1.4)$$

где $\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ – сопряженные координаты.

Перепишем принцип максимума из условия максимума Понтрягина и введенных ограничений:

$$H(X(t), \psi(t), U(t)) = H_C + \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{j=1}^m b_{ij} u_j(t) \right) = H_C + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \psi_i b_{ij} \right) u_j \quad (1.5)$$

Как видно, гамильтониан линейным образом зависит от управляющих воздействий. В связи с этим данная функция будет принимать максимальные значения при граничных значениях $\pm U_{MAX}$. Таким образом, оптимальное управление имеет вид:

$$u_j(t) = -U_{jMAX} \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^n \psi_i(t) \cdot b_{ij} \right] \quad (1.6)$$

Введем функцию оптимального переключения регулятора:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1.7)$$

Следовательно, $v > 0$, если $U > U_{max}$; $v < 0$, если $U < U_{max}$.

Рис. 1.1. Фазовые траектории движения

Получим функцию управления:

$$U(X) = U_{\max} \text{sign}[v(X)] \quad (1.8)$$

Итак, исходный объект управления:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C, \text{ при } U_m = 1, \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C, \text{ при } U_m = -1, \end{cases} \quad (1.9)$$

Семейство фазовых кривых с коэффициентами $C = 1, 0$ и -1 показано на рисунке 1.1.

По условию задачи мы должны попасть в начало координат, следовательно мы должны двигаться по фазовым траекториям $C = 0$. Для объекта управления второго порядка функция переключения описывается кривой L (рис. 1.1), которая получается объединением кривых с $C = 0$, лежащих от x_2 для $U = -U_{\max}$ и справа от x_2 для $U = U_{\max}$.

Рис. 1.2. Функция переключения

В соответствии с уравнениями можно аналитически описать L :

$$v(x_1, x_2) = x_1 + 0,5x_2|x_2| = 0 \quad (1.10)$$

$$U(x) = U_{\max} \text{sign}(x_1 + 0,5x_2|x_2|) \quad (1.11)$$

Переходный процесс системы с оптимальным по быстродействию регулятором примет вид, изображенный на рисунке 1.3:

Рис. 1.3. Движение системы управления за счет ненулевых начальных условий с использованием оптимального регулятора

Расчет квазиоптимального регулятора

Функциональное уравнение Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{U \in \Omega} \left\{ F(X, U, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \Phi(X, U, t) \right\} \quad (1.12)$$

Подставляя в данное уравнение данные проектируемой системы, получим уравнение Беллмана в частном виде для нашей системы:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{U \in \Omega} \left\{ \frac{\alpha x_1^2}{1 + \alpha x_1^2} + r \cdot u^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T (AX + Bu) \right\} \quad (1.13)$$

Из равенства:

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\alpha x_1^2}{1 + \alpha x_1^2} + r \cdot u^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T (AX + Bu) \right\}}{\partial u} = 0 \quad (1.14)$$

найдем $u(t)$:

$$u(t) = -\frac{B}{2r} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \quad (1.15)$$

или:

$$u(t) = -\frac{1}{2r} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right) \quad (1.16)$$

Следовательно:

$$u(X) = \underset{|u(t)| \leq 1}{sat} \left(-\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) \quad (1.17)$$

Подставим выражение ив уравнение Беллмана:

$$\frac{\alpha x_1^2}{1 + \alpha x_1^2} + r \cdot \left(\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)^T \left[AX + B \left(\frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) \right] = 0 \quad (1.18)$$

Упрости данное уравнение, получим:

$$\frac{\alpha x_1^2}{1 + \alpha x_1^2} + \frac{1}{4 \cdot r} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S \cdot x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial S \cdot x_2}{\partial x_2} = 0 \quad (1.19)$$

Подставим данное выражение для функции Беллмана в выражение (*) и приведем подобные слагаемые. Далее приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях. Подставим в найденный закон управления $U(t) = -\frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\partial S}{\partial x_2}$ полином $s(x)$, аппроксимирующий функцию Беллмана.

Результаты и обсуждение

Сравнение полученных регуляторов будем проводить по 3 критериям: значения интегрального критерия, наличие или отсутствие перерегулирования (первый и второй выброс ошибки) и время переходного процесса. Моделирование обеих систем управления производилось при одинаковых начальных условиях, равных

$$\begin{cases} x_1(0) = 2 \text{ град} \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Для проверки точности построения заданных систем, можно использовать следующий метод: интегральный критерий качества синтезируемой системы должен быть равен значению функции

Беллмана при тех же начальных условиях, при которых проводилось моделирование.

$$J = \int_0^{\infty} \frac{99 \times x_1^2(t)}{1 + 99 \times x_1^2(t)} + r \times u^2(t) dt \rightarrow \min \quad (1.21)$$

Выражение для $u(t)$ для квазиоптимального регулятора выглядит следующим образом:

Заключение

Можно сделать вывод, что квазиоптимальная система лучше всего приближается к оптимальной при значении $q=10$ и $r=0.1$. При этом значении обработка входного воздействия квазиоптимальным регулятором практически повторяет обработку входного воздействия оптимальным по точности регулятором, а рассогласование между значением функции Беллмана и интегральным критерием сравнительно невелико.

Список литературы

1. Александровский Б.С. Электропривод переменного тока на основе вентильного двигателя. М.: Энергия, 1974.
2. Аракелян А.К., Афанасьев А.А. Бесколлекторный электропривод на основе синхронной машины и зависимого инвертора. Чебоксары, 1971.
3. Афанасьев А.А. Малоинерционный высокоскоростной магнитоэлектрический беспазовый вентильный двигатель // Электричество. 2007. вып. 4. С. 28–35.
4. Рывкин С.Е. Скользящие режимы в задачах управления автоматизированным синхронным электроприводом. М.: Наука, 2009. 238 с.
5. Белов М.П. Автоматизированный электропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 576 с.
6. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. Москва: АСАДЕМА, 2008. 265 с.
7. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2010. 239 с.
8. Сурков В.В., Егоров А.Ю., Сухинин Б.В., Сурков А.В. Оптимальный по точности моментный вентильный двигатель // Инфо – 2008, Материалы межд. науч. конф. Сочи, 2008. С. 270–271.
9. Егоров А.Ю. Оптимальный по точности и быстродействию моментный вентильный двигатель // Известия Тульского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информационные технологии. Тула, 2009. Вып. 1. Часть 2. С. 31–37.
10. PterCampbel. Permanent Magnet Materials and their Application. Cambridge University Press, 1996. Page 172.
11. M. Gopal. Control systems: principles and design. 2nd ed. Tata McGraw-Hill, 2002. Page 159.
12. Shimon Y. Nof, Wilbert E. Wilhelm and Hans-Jürgen Warnecke. Industrial assembly. Springer, 1997. Page 174.
13. Peng Zhang. Industrial Control Technology: A Handbook for Engineers and Researchers. William Andrew, Inc., 2008. Page 91.

14. Ohio Electric Motors. Brushless DC Motors Used in Industrial Applications. Ohio Electric Motors. 2012. 1 Archived November 8, 2012, at Web Cite.
15. Bernstein, Bobby (15 January 2015). "Top 4 Fastest RC Cars for Sale in the World". heavy.com. Retrieved 2 February 2015. As far as THE fastest RC car available for sale is concerned, it is the Traxxas XO-1 Supercar. The XO-1 hits 100mph, with proper LiPos batteries. The maker's product specs indicates the usage of a "Traxxas Big Block brushless motor".

References

1. Aleksandrovskiy B.S. *Elektroprivod peremennogo toka na osnove ventil'nogo dvigatelya* [Electric drive of alternating current on the basis of a valve motor]. M.: Energiya, 1974.
2. Arakelyan A.K., Afanas'ev A.A. *Beskollektornyy elektroprivod na osnove sinkhronnoy mashiny i zavisimogo invertora* [Brushless electric drive based on a synchronous machine and a dependent inverter]. Chelboksary, 1971.
3. Afanas'ev A.A. *Elektrichestvo*. 2007. № 4. 3. 28–35.
4. Ryvkin S. E. *Skol'zyashchie rezhimy v zadachakh upravleniya avtomatizirovannym sinkhronnym elektroprivodom* [Sliding modes in control problems of an automated synchronous electric drive]. M.: Nauka, 2009. 238 p.
5. Belov M.P. *Avtomatizirovanny elektroprivod tipovykh proizvodstvennykh mekhanizmov i tekhnologicheskikh kompleksov* [Automated electric drive of typical production mechanisms and technological complexes]. M.: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2009. 576 p.
6. Sokolovskiy G.G. *Elektroprivody peremennogo toka s chastotnym regulirovaniem* [Electric drives of alternating current with frequency control]. Moskva: ACADEMA, 2008. 265 p.
7. Blagodatskikh V.I. *Vvedenie v optimal'noe upravlenie* [Introduction to Optimal Control]. M.: Vyssh. shk., 2010. 239 p.
8. Surkov V.V., Egorov A.Yu., Sukhinin B.V., Surkov A.V. *Info – 2008*. Sochi, 2008, pp. 270–271.

9. Egorov A.Yu. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatsionnye tekhnologii*. Tula, 2009. № 1. Part 2, pp. 31–37.
10. PterCampbel. *Permanent Magnet Materials and their Application*. Cambridge University Press, 1996. 172 p.
11. M. Gopal. *Control systems: principles and design*. 2nd ed. Tata McGraw-Hill, 2002. 159 p.
12. Shimon Y. Nof, Wilbert E. Wilhelm and Hans-Jürgen Warnecke. *Industrial assembly*. Springer, 1997. 174 p.
13. Peng Zhang. *Industrial Control Technology: A Handbook for Engineers and Researchers*. William Andrew, Inc., 2008. 91 p.
14. Ohio Electric Motors. *Brushless DC Motors Used in Industrial Applications*. Ohio Electric Motors. 2012. 1 Archived November 8, 2012, at Web Cite.
15. Bernstein, Bobby (15 January 2015). "Top 4 Fastest RC Cars for Sale in the World". *heavy.com*. Retrieved 2 February 2015. As far as THE fastest RC car available for sale is concerned, it is the Traxxas XO-1 Supercar. The XO-1 hits 100mph, with proper LiPos batteries. The maker's product specs indicates the usage of a "Traxxas Big Block brushless motor".

ДАННЫЕ ОБ АВТОРАХ

Стрелков Александр Андреевич, аспирант кафедры «Электротехника и электрооборудование», магистр технических наук
Тульский государственный университет
пр-кт Ленина, 92, Тула, Тульская обл., 300012, Российская Федерация
Andy193@mail.ru

Арутюнян Айк Араикович, аспирант кафедры «Электротехника и электрооборудование», магистр технических наук
Тульский государственный университет
пр-кт Ленина, 92, г. Тула, Тульская обл., 300012, Российская Федерация
ajk.araikevich.93@mail.ru

DATA ABOUT THE AUTHORS

Strelkov Alexander Andreevich, Postgraduate Student of the Department «Electrical engineering and electrical equipment», Master of Technical Sciences

Tula State University

92, Lenin Avenue, Tula, Tula region, 300012, Russian Federation

Andy193@mail.ru

ORCID: 0000-0003-0865-4263

ResearcherID: R-5822-2017

Arutyunyan Ayk Araikovich, Postgraduate Student of the Department «Electrical engineering and electrical equipment», Master of Technical Sciences

Tula State University

92, Lenin Avenue, Tula, Tula region, 300012, Russian Federation

Ajk.araikevich.93@mail.ru

ORCID: 0000-0002-3785-8970

ResearcherID: R-3476-2017